ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 20, No. 1, 1975

SUR LA THEORIE DU RENOUVELLEMENT POUR LES GROUPES NON ABFLIENS

A. BRUNEL[†] ET D. REVUZ[†]

ABSTRACT

Assuming that their laws are spread-out, we extend the renewal theorem to transient random walks on several classes of non-abelian groups.

Depuis les travaux de Kesten et Spitzer [9], d'Ornstein [12] et de Port et Stone [13] la théorie du renouvellement pour les groupes abéliens localement compacts est bien connue, on pourra en trouver un exposé dans [14]. Plusieurs tentatives ont été faites pour étendre ces résultats aux groupes non abéliens; c'est ainsi que Derriennic et Guivarc'h [4] ont traité le cas des groupes non moyennables tandis que Guivarc'h et Keane [7] traitaient celui des groupes nilpotents à génération compacte.

Nous voulons ici donner un autre jeu d'hypothèses permettant d'atteindre des résultats semblables. Nous ne considèrerons que des lois étalées afin d'utiliser les techniques de [3] (dont cet article est toutefois indépendant) mais nous atteindrons des classes de groupes plus larges que celle de [7] par exemple les groupes de Lie de type rigide. Cet article contient donc les résultats annoncés dans [15].

1. Hypotheses et notations

Dans toute la suite nous étudierons un groupe **G** localement compact métrisable et non compact et une probabilité μ sur la tribu borélienne de **G**. On appellera μ^n les puissances de convolution de μ.

La marche aléatoire gauche X de loi μ est la chaîne de Markov d'espace d'état **G** dont la probabilité de transition est égale à $P(x,.) = \mu * \varepsilon_x$. On a évidemment $P_n(x,.) = \mu^n * \varepsilon_x$. On considere aussi la marche duale $\hat{X}$ dont la loi $\hat{\mu}$ est l'image de μ par l'application $x \to x^{-1}$.

Nous ferons les hypothèses suivantes:

[†] Equipe de Recherche n° 1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la Section n° 1 "Mathématique, Informatique" associée au C.N.R.S.

Received March 18, 1974

i) Le groupe **G** est unimodulaire; on appellera m une mesure de Haar fixée une fois pour toute.

ii) Le groupe **G** est engendré par le support de μ.

iii) La marche X est transiente, en d'autres termes la mesure $G = \Sigma_0^\infty \mu^n$ est une mesure de Radon et l'ensemble de mesures $\{G * \varepsilon_x, x \in \mathbf{G}\}$ est vaguement relativement compact.

iv) La probabilité μ est étalée, c'est à dire qu'il existe un entier n tel que μ^n ne soit pas étrangère à une mesure de Haar de **G**.

Avec ces hypothèses il est montré dans [14] (ch. 5) la

PROPOSITION 1.1. — *Il existe une fonction p continue et bornée et une mesure bornée ν telles que $G = p.m. + \nu$.*

On appellera Δ le point à l'infini du groupe dans la compactification d'Alexandroff.

On appellera σ_a et τ_a les opérateurs de translation à gauche et à droite dans **G** correspondant à l'élément $a \in \mathbf{G}$. Pour une fonction f on a

$$\sigma_a f(x) = f(ax), \quad \tau_a f(x) = f(xa).$$

La probabilité de transition est invariante par les translations à droite ($\tau_a P = P\tau_a$) comme il est facilement vérifié.

Nous ferons enfin l'hypothèse suivante:

Toutes les fonctions harmoniques bornées sont constantes pour X aussi bien que pour la marche duale $\hat{X}$.

On rappelle qu'une fonction borélienne f est harmonique si pour tout x,

$$f(x) = Pf(x) = \int f(yx)\mu(dy).$$

Ceci est le contenu du théorème de Choquet et Deny dans le cas des groupes abéliens. Les résultats de [1], [2] et [6] prouvent que notre jeu d'hypothèses est encore vérifié pour de larges classes de groupes non abéliens contenant les groupes de Lie connexes de type rigide.

2. Propositions preparatoires

Dans ce paragraphe nous démontrons les résultats nécessaires à la démonstration de la section suivante.

PROPOSITION 2.1. *L'ensemble des mesures* $\{\varepsilon_x * G * \varepsilon_y,\ x, y \in \mathbf{G}\}$ *est vaguement relativement compact.*

DÉMONSTRATION. Soit K un compact quelconque de $\mathbf{G}$. D'après la Prop. 1.1. on a

$$(\varepsilon_x * G * \varepsilon_y)(K) = \int 1_K(x u y) p(u) m(du) + \int 1_K(xuy)\, \nu(du)$$
$$\leqq \|p\| \cdot m(K) + \|\nu\|$$

ce qui démontre le résultat.

Dans toute la suite C_K sera l'espace des fonctions continues à support compact. On peut transposer à notre situation les résultats classiques suivants (cf. [14]).

THÉORÈME 2.2. *Toutes les valeurs d'adhérence de l'ensemble* $\{G * \varepsilon_x, x \in \mathbf{G}\}$ *sont des multiples de* m.

DÉMONSTRATION. Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments du groupe convergeant vers le point à l'infini Δ et telle que les measures $G * \varepsilon_{x_n}$ aie une limite vague ν. Comme $G * \varepsilon_{x_n} = \varepsilon_{x_n} + \mu * G * \varepsilon_{x_n}$ on voit facilement que

$$\nu = \mu * \nu.$$

Il résulte d'autre part de la proposition précédente que l'ensemble $\{\varepsilon_y * \nu, y \in \mathbf{G}\}$ est vaguement relativement compact. Si $\phi \in C_K$, la fonction

$$h(y) = \int \phi(y^{-1}x)\, \nu(dx)$$

est donc uniformément continue à gauche, bornée et $\hat{\mu}$-harmonique. Elle est donc constante et il en résulte que ν est une mesure de Haar.

Dans toute la suite f sera une fonction arbitraire de C_K.

COROLLAIRE 2.3. *Pour tout compact* H *de* G *on a*

$$\lim_{a \to \Delta} Gf(ax) - Gf(a) = 0$$

uniformément pour $x \in H$.

DÉMONSTRATION. Quelle que soit la suite convergeant vers Δ on peut en extraire une suite $\{a_n\}$ telle que les mesures $G(a_n, .)$ convergent vers un multiple c.m. de la mesure de Haar; on a donc

$$\lim_{a_n \to \Delta} Gf(a_n x) - Gf(a_n) = c(\langle m * \varepsilon_x, f\rangle - \langle m, f\rangle) = 0,$$

ce qui démontre l'existence de la limite.

De plus Gf étant uniformément continue à droite pour tout x on peut trouver un voisinage V_x tel que pour $h \in V_x$ et tout $k \in \mathbf{G}$ on ait

$$|Gf(kx) - Gf(kh)| < \varepsilon/2.$$

D'après la première partie, il existe un compact H_x tel que pour $k \notin H_x$ on ait

$$|Gf(kx) - Gf(k)| < \varepsilon/2.$$

Pour $h \in V_x$ et $k \notin H_x$ on a donc

$$|Gf(kh) - Gf(k)| < \varepsilon,$$

et la propriété de Borel-Lebesgue permet facilement de conclure.

PROPOSITION 2.4. *Pour $f \in C_k$ on a*

$$\lim_{a \to \Delta} Gf(xa) - Gf(a) = 0$$

uniformément pour $x \in K$ quelque soit le compact K.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages de Δ et posons

$$L(x) = \lim_{\substack{\mathcal{U} \\ a \to \Delta}} Gf(xa).$$

De la relation $P_n Gf(xa) - Gf(xa) = \Sigma_0^{n-1} P_k f(xa)$ il résulte que

$$\lim_{a\to\Delta}(P_nGf(xa)-Gf(xa))=0.$$

Si n est assez grand, on peut écrire $\mu^n=g_nm+\beta_m$ avec $g\in\mathscr{L}^1(m)$ et l'on a

$$\left|P_nGf(xa)-\int Gf(yxa)g_n(y)m(dy)\right|\leqq\|\beta_n\|\,\|Gf\|.$$

Soit ψ un représentant borélien de la limite de $Gf(xa)$ suivant $\mathscr{U}$ dans $\sigma(L^\infty,L^1)$; on a donc

$$\left|L(x)-\int \psi(yx)g_n(y)m(dy)\right|\leqq|\beta_n\|\,\|Gf\|$$

et

$$|L(x)-P_n\psi(x)|\leqq 2B\|\beta_n\|.$$

Il en résulte que $L=\lim_nP_b\psi$ donc que L est constante, ce qui entraîne que $\lim_{a\to\Delta}Gf(xa)-Gf(a)=0$, donc $\lim_{a\to\Delta}Gf(xa)-Gf(a)=0$.

Il reste à montrer que cette convergence est uniforme lorsque x décrit un compact. Pour cela nous utilisons une généralisation du théorème d'Egoroff dûe à Mokobodsky et exposée dans [14] (ch. 1) suivant laquelle on peut trouver un ensemble compact F de mesure arbitrairement grande sur lequel la convergence est uniforme; pour tout $\varepsilon>0$ il existe donc un compact K tel que pour $x\in F$ et $a\in K^c$,

$$|Gf(xa)-Gf(a)|<\varepsilon.$$

Ceci entraîne que pour $x\in F$ et $a\in FK^c$

$$|Gf(a)-Gf(x^{-1}a)|<\varepsilon,$$

ce qui entraîne à son tour que pour $x\in F$, $y\in F$, $a\in F^{-1}FK^c$,

$$|Gf(ya)-Gf(x^{-1}ya)|<\varepsilon.$$

En combinant la première et la troisième inégalité on obtient que pour $x,y\in F$ et $a\in F^{-1}FK^c\cap K^c=K^c$ on a

$$|Gf(x^{-1}ya)-Gf(a)|<2\varepsilon.$$

La convergence est uniforme pour $x \in F^{-1}F$ mais cet ensemble contient un voisinage de l'unité et le résultat s'en déduit facilement.

3. Resultats principaux

Dans ce qui suit nous nous servirons uniquement du corollaire 2.3. et de la proposition 2.4. Tout ensemble d'hypothèses permettant d'obtenir ces résultats mènerait donc aux mêmes conclusions que les nôtres. On remarquera que l'uniformité du corollaire 2.3. n'est pas nécessaire dans la démonstration du lemme 3.1. La démonstration de ce lemme rappelle des démonstrations de Herz [8] et Ornstein [12].

LEMMA 3.1. *Soit $f \in C_K$ et $s = \overline{\lim}_{x \to \Delta} Gf(x)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de Δ tel que pour tout $x \in V$ on ait ou bien $Gf(x) > s - \varepsilon$ ou bien $Gf(x^{-1}) > s - \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION. Supposons le résultat faux; il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout voisinage V de Δ on ait des points x dans V tels que

$$Gf(x) < s - \varepsilon \quad \text{et} \quad Gf(x^{-1}) < s - \varepsilon. \tag{1}$$

Nous allons construire par récurrence une suite $a_1 = e, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ de points de **G** ayant la propriété suivante: quel que soit x

$$1_{K_j}(x) \cdot Gf(xa_i) < s - \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

en appelant K_j le support de la fonction $\tau_{a_j} f$ (on rappelle que $\tau_{a_j} f(x) = f(xa_j)$).

Comme $\cup_{i=1}^{n} K_i$ est un ensemble compact il résulte de la Prop. 2.4. qu'il existe un voisinage V_1 de Δ tel que pour $z \in V_1$ on aie

$$\sup_{x \in \cup_{i=1}^{N} K_i} |Gf(xz) - Gf(z)| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

Soit d'autre part un $a_i, i \leqq n$, fixé, il existe de la même façon un voisinage V_2^i de Δ tel que pour $z \in V_2^i$ et $\xi \in K_1$ on ait

$$|Gf(\xi z^{-1} a_i) - Gf(z^{-1} a_i)| < \varepsilon/4;$$

mais comme $xz \in K_1$ si et seulement si x appartient au support de $\tau_z f$, soit $\operatorname{Supp} \tau_z f$, ceci équivaut, en remplaçant ξ par xz, à

$$\sup_{x \in \operatorname{Supp} \tau_z f} |Gf(x a_i) - Gf(z^{-1} a_i)| < \varepsilon/4.$$

Par ailleurs d'après le Cor. 2.3, il existe un voisinage $\tilde{V}_2^i \subset V_2^i$ tel que pour $z \in \tilde{V}_2^i$ on ait

$$|Gf(z^{-1}) - Gf(z^{-1} a_i)| < \varepsilon/4.$$

Il en résulte que pour $z \in V_2 = \cap \tilde{V}_2^i$, on a pour $1 \leqq i \leqq n$,

$$\sup_{x \in \operatorname{Supp} \tau_z f} |Gf(z^{-1}) - Gf(x a_i)| < \varepsilon/2. \tag{3}$$

Maintenant d'après notre hypothèse (1) il existe dans $V_1 \cap V_2$ un point z tel que

$$Gf(z) < s - \varepsilon \text{ et } Gf(z^{-1}) < s - \varepsilon.$$

Appelons a_{n+1} ce point z particulier. D'après (2) on a alors

$$\sup_{x \in \cup_{i=1}^n K_i} Gf(x a_{n+1}) > s - \varepsilon/2;$$

d'après (3) on a pour $x \in \operatorname{Supp} \tau_{a_{n+1}} f$ et pour $i \leqq 1 \leqq n$

$$Gf(x a_i) < s - \varepsilon/2.$$

Le point a_{n+1} satisfait donc aux conditions désirées. Il est d'autre part clair qu'on peut supposer les K_i disjoints.

Posons $H = \cup_{i=1}^n K_i$ et soit x_0 un point tel que

$$Gf(x_0 a_i) > s - \varepsilon/4$$

pour $i = 1, 2, \cdots n$; un tel point existe forcément d'après le Cor. 2.3. Appelons ρ_1 la restriction de la mesure $P_H(x_0, .)$ à K_i et soit k un indice i tel que $\|\rho_i\|$ soit minimum; on a forcément $\|\rho_k\| \leqq 1/n$. On a alors

$$\begin{aligned} s - \varepsilon/4 < Gf(x_0 a_k) &= P_H G(\tau_{a_k} f)(x_0) \\ &\leqq (s - \varepsilon/2)(1 - \|\rho_k\|) + \|Gf\| \, \|\rho_k\|, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\varepsilon/4 < (\|Gf\| - s + \varepsilon/2)/n$$

et comme n est arbitraire nous avons une contradiction. La démonstration est complète.

THÉORÈME 3.2. *L'ensemble* $\{G * \varepsilon_x, x \in \mathrm{G}\}$ *a toujours la mesure nulle comme valeur d'adhérence. Il a au plus une autre valeur d'adhérence qui est un multiple de la mesure de Haar.*

DÉMONSTRATION. Qu'il y ait la mesure nulle comme valeur d'adhérence est bien connu. D'autre part si $f \in C_K$, comme

$$\underline{\lim}\, G(f) = -\overline{\lim}\, G(-f)$$

on voit d'après le lemme précédent que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de Δ tel que pour $x \in V$ on ait

$$Gf(x) > \overline{\lim}\, Gf - \varepsilon \quad \text{et} \quad Gf(x^{-1}) < \underline{\lim}\, Gf + \varepsilon,$$

ou bien

$$Gf(x) < \underline{\lim}\, Gf + \varepsilon \quad \text{et} \quad Gf(x^{-1}) > \overline{\lim}\, Gf - \varepsilon.$$

Or l'un au moins des deux nombres $\overline{\lim}\, Gf$ et $\underline{\lim}\, Gf$ est nul et le résultat découle alors du Th. 2.2.

REMARQUE 3.3. On constate qu'on a le résultat suivant classique pour les groupes abéliens: $\lim_{x \to \Delta} Gf(x)\, Gf(-x) = 0$. Ce résultat est également vrai pour tous les groupes dénombrables; la démonstration de [16] s'étend en effet de manière évidente et ne suppose pas le Théorème de Choquet et Deny. On peut se demander si ce résultat n'est pas vrai de manière tout à fait générale.

Comme d'habitude nous poserons:

DÉFINITION 3.4. La marche X est dite de type I si la mesure nulle est la seule valeur d'adhérence, elle est dite de type II dans le cas contraire.

Dans le cas des groupes abéliens on sait que les seuls groupes susceptibles de porter des marches de type II sont les groupes de la forme $\mathbf{R} \oplus \mathbf{K}$ ou $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{K}$ où $\mathbf{K}$ est un groupe compact. Dans le cas général il semble vraisemblable que les seuls groupes susceptibles de porter une marche de type II sont les extensions par $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{Z}$ d'un groupe compact.

Il n'est pas possible de chercher à montrer ce résultat puisque le domaine de validité du Théorème de Choquet-Deny n'est pas connu. Nous allons nous contenter ci-dessous de donner quelques classes de groupe pour lesquelles le résultat est valable. Dans toute la suite la locution "toutes les marches" signifiera toutes les marches de loi μ étalée et satisfaisant au théorème de Choquet-Deny. Nous aurons besoin de la proposition suivante qui se démontre exactement comme la proposition 5.4.1. de [14].

PROPOSITION 3.5. *Si* **G** *contient un sous-groupe ouvert* **H** *compactement engendré et non compact, tel que* **G/H** *soit infini il n'existe pas de marches de type* II *sur* **G**.

Nous allons appliquer ceci pour montrer brièvement comment on peut retrouver le résultat de Guivarc'h et Keane [7] à ceci près que nous supposons μ étalée.

On suppose que **G** est nilpotent et à génération compacte. On appelle **K(G)** le sous-groupe compact des éléments compacts de **G** c'est un sous groupe distingué de **G** et d'après [10] et [11] le groupe **G/K(G)** est un groupe de Lie à génération compacte sans torsion, on a alors

THÉORÈME 3.6. *Toutes les marches sur G sont de type I sauf si* **G/K(G)** *est isomorphe à* **R** *ou à* **Z**.

DÉMONSTRATION. Observons d'abord que le résultat est vrai pour **G** s'il l'est pour **G/K(G)**. En effet si σ est l'application canonique **G** $\to$ **G/K(G)** on pose $\tilde{\mu} = \sigma(\mu)$ et si f est une fonction sur **G/K(G)** on pose $\bar{f} = f \circ \sigma$. On vérifie facilement que

$$\langle \tilde{\mu} * \tilde{\nu} f \rangle = \langle \mu * \nu, \bar{f} \rangle$$

d'où il résulte avec des notations évidentes, que pour $x \in$ **G/K(G)**

$$\langle G * \varepsilon_{\sigma^{-1}(x)}, \bar{f} \rangle = \langle \tilde{G} * \varepsilon_x, f \rangle,$$

et le résultat en découle alors facilement.

Posons alors pour simplifier **G'** = **G/K(G)** et soit $\mathbf{G}'_0$ sa composante connexe de l'unité. Deux cas se présentent. Si $\mathbf{G}'_0$ est réduit à $\{e\}$, le groupe est discret, on peut faire jouer au centre de G' le rôle de H dans la Proposition 3.5. et donc toutes les marches sont de type I sauf si $\mathbf{G}'$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Si $\mathbf{G}'_0$ est un sous groupe ouvert, G'/G'_0 est infini, et dans ce cas la Proposition 3.5. permet de conclure, ou $\mathbf{G}'/\mathbf{G}'_0$ est réduit à e. Si le point à l'infini de $\mathbf{G}_0$ admet une base de voisinages connexes le Théorème 3.2. entraîne que toutes les marches sont de type I; pour qu'il y ait une marche de type II il faut donc que $\mathbf{G}'_0$, et donc $\mathbf{G}'$, soit isomorphe à $\mathbf{R}$.

Ce dernier argument de connexité permet de donner un résultat analogue recouvrant partiellement le précédent. D'après les travaux d'Azencott [1] et leur généralisation dans [2] le théorème de Choquet-Deny est valable pour les lois étalées sur les groupes de type (T) ayant la propriété de points fixes. Ces groupes sont ainsi caractérisés: si G_0 est la composante connexe de radical $\mathbf{S}$ il faut que $\mathbf{G}/\mathbf{G}_0$ et $\mathbf{G}_0/\mathbf{S}$ soient compacts et qu'il existe un sous groupe compact $\mathbf{K}$ tel que $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et tel que si $\mathbf{A}$ est l'algèbre de Lie de son radical, pour tout X de $\mathbf{A}$, $\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}X$ n'a que des valeurs propres imaginaires pures. Ces groupes sont unimodulaires, on peut donc leur appliquer les résultats précédents. Par les mêmes méthodes de réduction que précédemment on montrera le

THÉORÈME 3.7. *Si* $\mathbf{G}$ *est un groupe de type* (T) *ayant la propriété de point fixe, il ne porte des marches étalées de type II que s'il est isomorphe à l'extension par* $\mathbf{R}$ *d'un groupe compact.*

On voit par exemple que sur les groupes des déplacements du plan ou de l'espace, il n'existe que des marches de type I.

Note sur épreuves. Depuis la rédaction de cet article il a été montré par Mme. L. Elie qu'il existait des marches aléatoires sur le groupe resoluble de dimension 2 pour lesquelles il existait dans le renouvellement des limites non nulles qui ne sont pas des mesures de Haar.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Azencott, *Espaces de Poisson des groupes localement compacts*, Lecture Notes in Mathematics, 148, Springer-Verlag, Berlin, (1970).

2. C. Bellaiche-Fremond et M. Sueur-Pontier, *Caractérisation des groupes localement compacts de type (T) ayant la propriété de point fixe*, Ann. Inst. H. Poincaré VII 4 (1971), 293–298.

3. A. Brunel et D. Revuz, *Marches de Harris sur les groupes localement compacts I*, A paraître dans Ann. Ecole Normale Supérieure.

4. Y. Derriennic et Y. Guivarc'h, *Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables*, C.R. Acad. Sci. Sér. A, **277**, 613–615, (1973).

5. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, Wiley, New-York, 1966.

6. Y. Guivarc'h, *Croissance polynomiale et période des fonctions harmoniques*, Bull. Soc. Math. France. **101** (1973), 333–379.

7. Y. Guivarc'h et M. Keane, *Un théorème de renouvellement pour les groupes nilpotents*, Asterisque, **4**, 1973.

8. C. S. Herz, *Les théorèmes de renouvellement*, Ann. Inst. Fourier, (Grenoble) **15** (1965), 169–188.

9. H. Kesten and F. Spitzer, *Random walk on countably infinite abelian groups*, Acta Math. **114** (1965), 237–265.

10. Malcev, Amer. Math. Soc. Trans., No. 39, 1957.

11. D. Montgomery and L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience, New York, 1955.

12. D. S. Ornstein, *Random walks I*, Trans. Amer. Math. Soc., **138** (1969), 1–43.

13. C. C. Port and C. J. Stone, *Potential theory of random walks on abelian groups*, Acta Math. **122** (1969), 19–114.

14. D. Revuz, *Markov Chains*, A paraître.

15. D. Revuz, *Théorème du renouvellement pour une classe de groupes de Lie et d'espaces homogènes*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **273** (1971), 246–247.

16. F. Spitzer, *Principles of random walks*, Van Nostrand, New York, 1964.

Laboratoire de Calcul des Probabilités
4 Place Jussieu—Tour 56
75230 Paris Cedex 05